Комплексный анализ, семинар 9 6.04.2012

1. Отобразите следующие области биголоморфно на верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} z > 0\}$:

1) единичный круг $\{|z| < 1\}$;
2) полукруг $\{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$;
3) единичный круг $\{|z| < 1\}$ с разрезом по отрезку $[1/3, 1]$;
4) квадрант $\{\operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$;
5) полосу $\{0 < \operatorname{Im} z < 1\}$.

2. Приведите пример голоморфной и ограниченной в области $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ функции, которая не может быть голоморфно продолжена (как однозначная функция комплексного переменного $z \in \mathbb{C}$) ни в одну точку отрезка $[-1, 1]$.

3. Отобразите единичный круг на себя биголоморфно таким образом, чтобы две заданные точки z_1, z_2 внутри круга перешли в точки $\pm ia$, для некоторого $0 < a < 1$. Для каких значений a такое отображение существует?

4. Найдите все автоморфизмы правой полуплоскости $\{\operatorname{Re} z > 0\}$.

5. Область называется *звездной* относительно заданной точки, если любую точку области можно соединить с заданной точкой отрезком, который целиком лежит в этой области. Докажите, что если функция $w = f(z)$, обладающая свойством $f(0) = 0$, отображает единичный круг $\{|z| < 1\}$ на область, звездную относительно точки $w = 0$, то функция

$$g(z) = \int_0^z \frac{f(t)}{t}\, dt$$

отображает единичный круг на выпуклую область.

6. Обозначим $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ и $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) : f(0) = f'(0) - 1 = 0\}$. Функция $f \in \mathcal{A}$ называется *звездной* (относительно начала координат), если $tw \in f(\mathbb{D})$ для всех $w \in f(\mathbb{D})$ и всех $t \in [0, 1]$. Функция $f \in \mathcal{A}$ называется *звездной порядка* $\delta \in (0, 1)$, если

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \delta, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Обозначим через $\mathcal{S}^*$ класс звездных функций через $\mathcal{S}^*(\delta)$ класс звездных функций порядка $\delta \in (0, 1)$.

1) Докажите, что $\mathcal{S}^*(\delta) \subset \mathcal{S}^*$ при $\delta \in (0, 1)$.

2) Являются ли звездными функции $-\ln(1 - z)$, $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ (для выбранных ветвей логарифма) и $z/(1 - z)^2$ (*функция Кёбе*)? Что можно сказать об их порядке звездности?

3) Найдите области, на которые перечисленные выше функции отображают единичный круг.